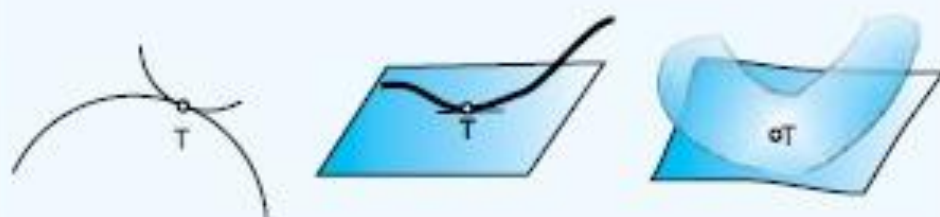


TANGENCIAS

En general llamamos tangencia al contacto entre dos líneas, entre un plano y una línea o entre dos planos.

A este punto de contacto se le denomina punto de tangencia.



ENLACES

Se denomina enlace a la unión armónica de dos o más líneas de forma que no rompan su continuidad, es decir se visualicen como una sola línea.

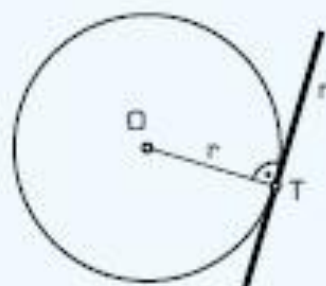
NORMAS GENERALES

Para la resolución de problemas de tangencias y enlaces se han de tener en cuenta las siguientes normas:

1. **Recta tangente a una circunferencia.** Si una recta es tangente a una circunferencia, el radio que pasa por el punto de tangencia tiene que ser perpendicular a la recta.

El proceso a seguir para trazar una recta tangente a una circunferencia es:

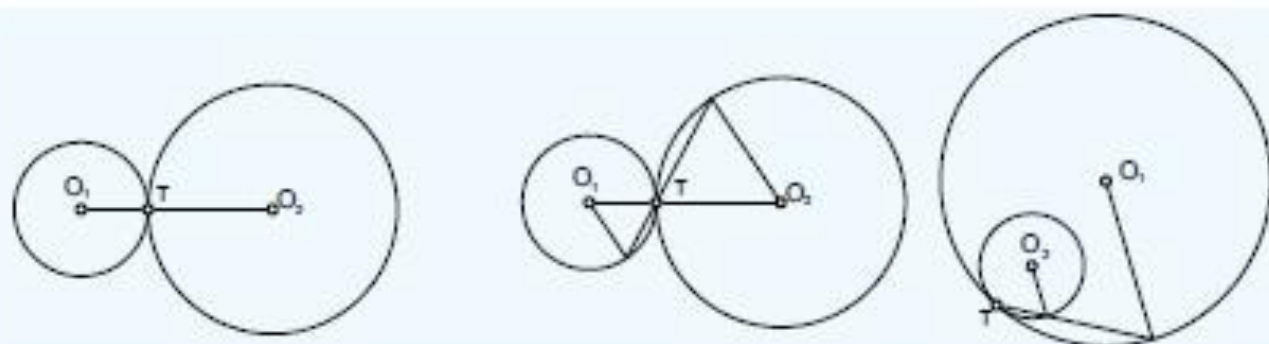
- Localizar el punto de tangencia.
- Unir el punto de tangencia con el centro de la circunferencia.
- Por el punto de tangencia trazar la recta perpendicular al radio.



2. **Circunferencias tangentes.** Si dos circunferencias son tangentes, su punto de tangencia y los centros de las circunferencias han de estar alineados (en línea recta). Además también se ha de cumplir, que la recta que une los extremos de dos radios paralelos pasa por el punto de tangencia.

El proceso a seguir para trazar dos circunferencias tangentes es:

- Localizar el centro de la circunferencia que ha de ser tangente con la otra.
- Trazar la recta que pasa por los centros de ambas circunferencias, obteniendo sobre la circunferencia dada el punto de tangencia.
- Dibujar la circunferencia tangente a la dada sabiendo que ha de pasar por el punto de tangencia.

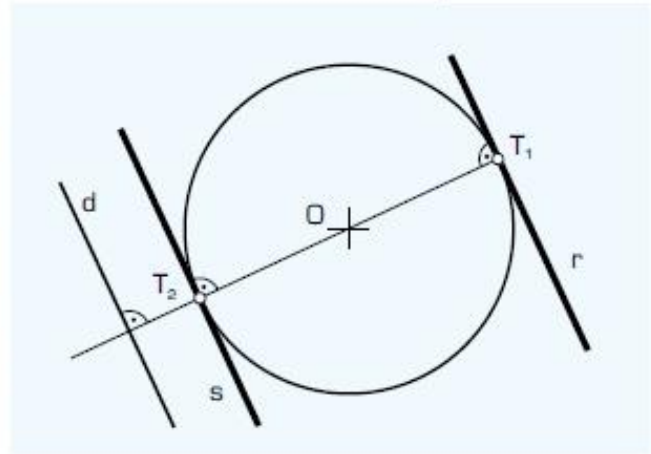


PROBLEMAS BÁSICOS DE TANGENCIAS

Rectas tangentes a una circunferencia y paralelas a una dirección

Dada la circunferencia de centro O y la dirección d , el proceso a seguir es:

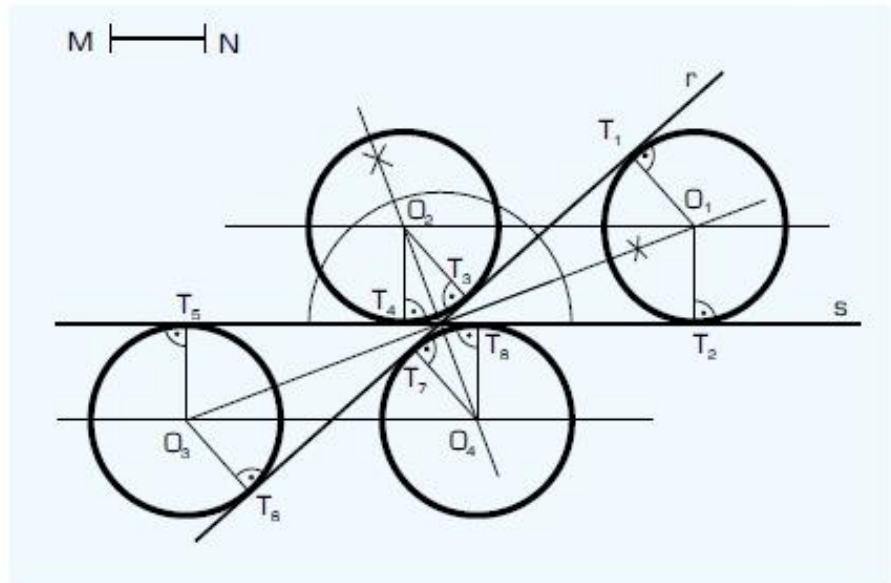
1. Se traza la recta perpendicular a la dirección d pasando por O , obteniendo en la circunferencia los puntos de tangencia T_1 y T_2 .
2. Por T_1 y T_2 se trazan rectas paralelas a la dirección dada, obteniendo las rectas pedidas r y s .



Circunferencias tangentes a dos rectas que se cortan conocido el radio de ellas

Dadas las rectas r y s que se cortan, y el radio de las circunferencias solución por el segmento MN , el proceso a seguir es:

1. Se trazan las bisectrices de los ángulos que forman las rectas dadas.
2. Se trazan las rectas equidistantes de s a la distancia dada MN , obteniendo en la intersección con las bisectrices trazadas en el apartado anterior los centros O_1, O_2, O_3 y O_4 de las circunferencias solución.



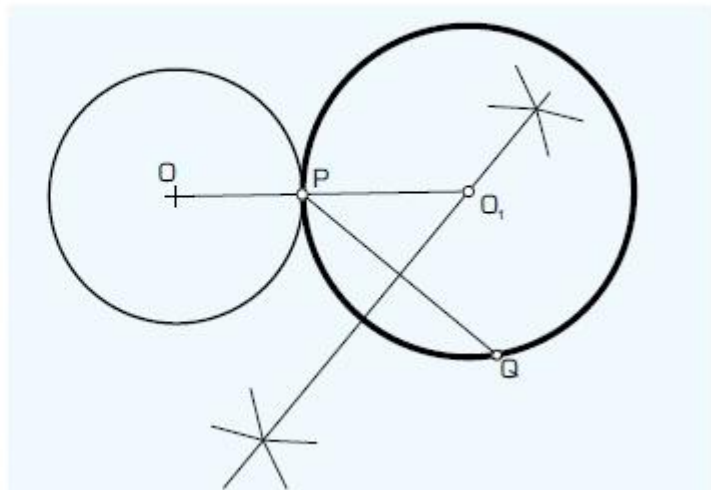
3. Se determinan los puntos de tangencia en las rectas, trazando desde los centros de las circunferencias rectas perpendiculares a las dadas r y s , obteniendo $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$ y T_8 .

4. Con centro en O_1, O_2, O_3 y O_4 y radio MN se dibujan las circunferencias pedidas.

Circunferencia tangente en un punto a una dada y que pase por un punto exterior a ella

Dada la circunferencia de centro O , un punto P en ella y el punto Q exterior, el proceso a seguir es:

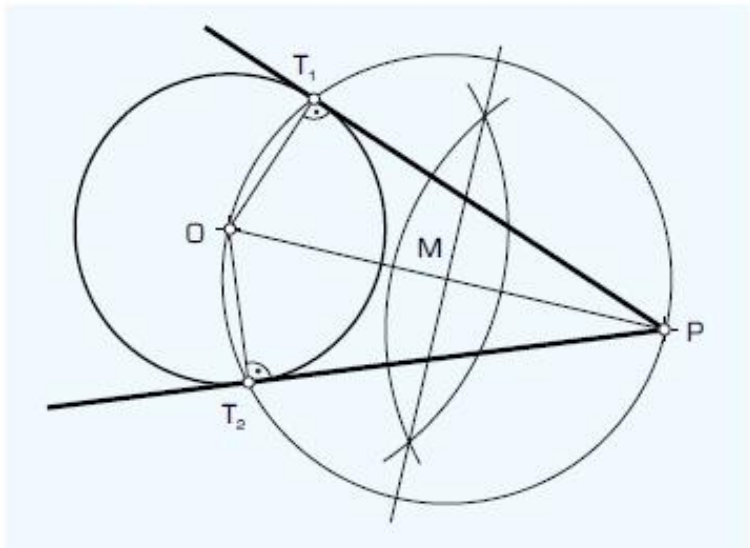
1. Teniendo en cuenta que, si dos circunferencias son tangentes sus centros han de estar alineados con el punto de tangencia, el centro de la circunferencia solución ha de hallarse en la recta que pasa por O y P .
2. Por otro lado, si la circunferencia solución ha de pasar por P y Q , quiere decir que su centro ha de hallarse también en la mediatriz de dicho segmento, por tanto se traza la mediatriz de PQ .
3. La intersección de ambas rectas nos determina el centro O_1 de la circunferencia solución.



Rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior

Dada la circunferencia de centro O y el punto P exterior a ella, el proceso a seguir es:

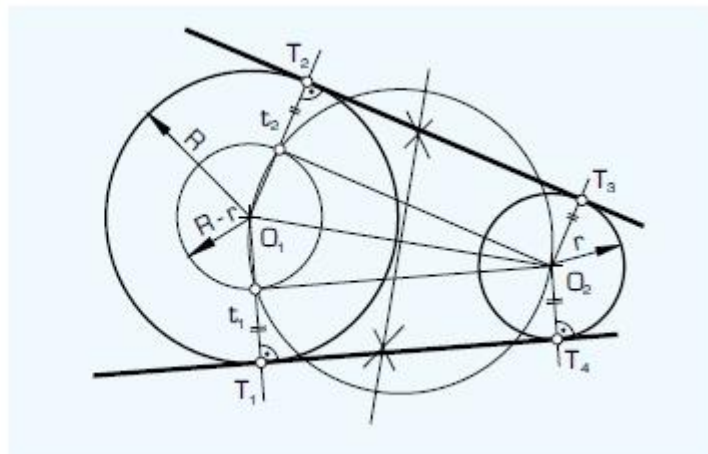
1. Teniendo en cuenta que, la recta tangente a la circunferencia ha de formar con el radio de la circunferencia que pasa por el punto de tangencia un ángulo recto, el problema se reduce a construir un triángulo rectángulo de hipotenusa OP y cateto igual al radio de la circunferencia. Es decir, trazamos el arco capaz de 90° del segmento OP , obteniendo en su intersección con la circunferencia dada el punto T_1 .
2. Uniendo P con T_1 se obtiene una de las rectas solución.
3. Análogamente se obtiene el punto T_2 y la recta PT_2 .



Rectas tangentes comunes exteriores a dos circunferencias

Dadas las circunferencias de centros O_1 y O_2 cuyos radios son R y r respectivamente, el proceso a seguir es:

1. Con centro en O_1 se traza una circunferencia de radio $R-r$.
2. Se trazan las tangentes exteriores a esta circunferencia desde el punto O_2 siguiendo el proceso explicado anteriormente, obteniendo t_1 y t_2 .
3. Se prolongan los radios O_1t_1 y O_2t_2



hasta cortar a la circunferencia de radio R en T_1 y T_2 .

4. Trazando paralelas a las rectas O_1T_1 y O_2T_2 por O_2 se obtienen los puntos de tangencia T_3 y T_4 en la circunferencia menor de radio r .

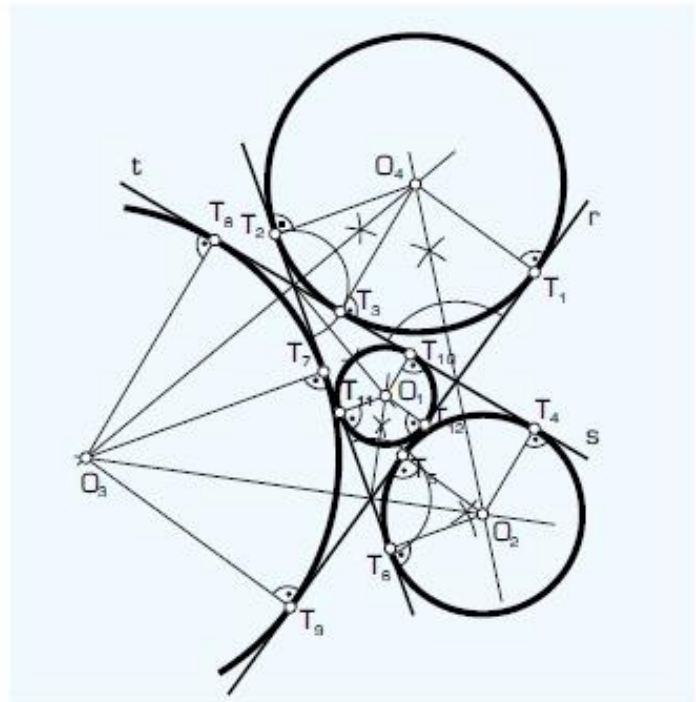
5. Uniendo T_2 con T_3 y T_1 con T_4 se obtienen las rectas tangentes exteriores a las circunferencias dadas.

Circunferencias tangentes exteriores e interiores a los lados de un triángulo y sus prolongaciones

Dado el triángulo por las rectas r , s y t que se cortan dos a dos, el proceso a seguir es:

1. Se determina el incentro del triángulo, obteniendo el centro O_1 de la circunferencia inscrita en el triángulo. Sus puntos de tangencia se obtienen trazando desde O_1 perpendiculares a los lados.

2. Se trazan las bisectrices de los ángulos exteriores del triángulo, cortándose dos a dos según O_2 , O_3 y O_4 , que son los centros de las circunferencias tangentes a las prolongaciones de los lados del triángulo. Los puntos de tangencia en las rectas se obtienen trazando desde los centros rectas perpendiculares a los lados.



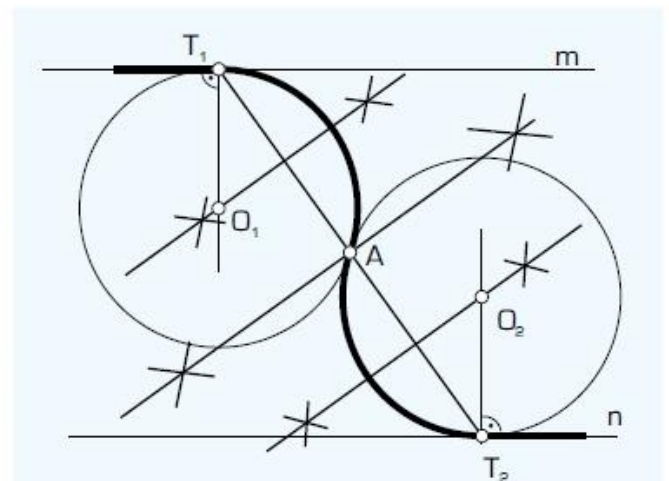
Enlace de dos rectas paralelas con un arco de igual radio siendo conocidos los puntos de tangencia en las rectas

Dadas las rectas m y n y los puntos de tangencia en ella T_1 y T_2 , el proceso a seguir es:

1. Se une T_1 con T_2 , y se obtiene el punto medio A de este segmento trazando su mediatriz.

2. Por T_1 y T_2 se trazan perpendiculares a m y n respectivamente.

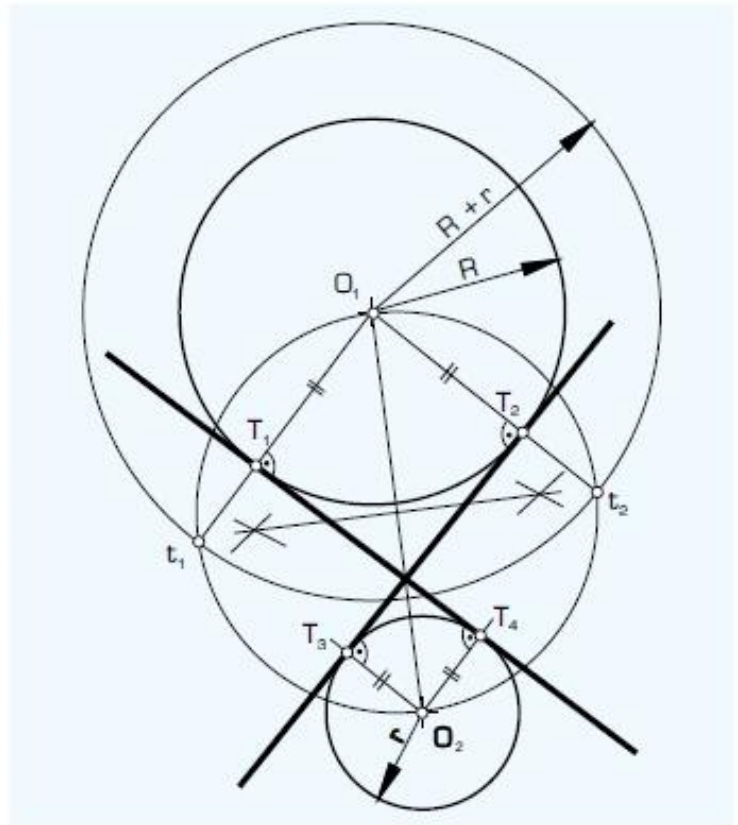
3. Se trazan las mediatrices de los segmentos AT_1 y AT_2 , obteniendo en la intersección con las perpendiculares trazadas en el apartado anterior los puntos O_1 y O_2 , centros de los arcos del enlace.



Rectas tangentes comunes interiores a dos circunferencias

Dadas las circunferencias de centros O_1 y O_2 cuyos radios son R y r respectivamente, el proceso a seguir es:

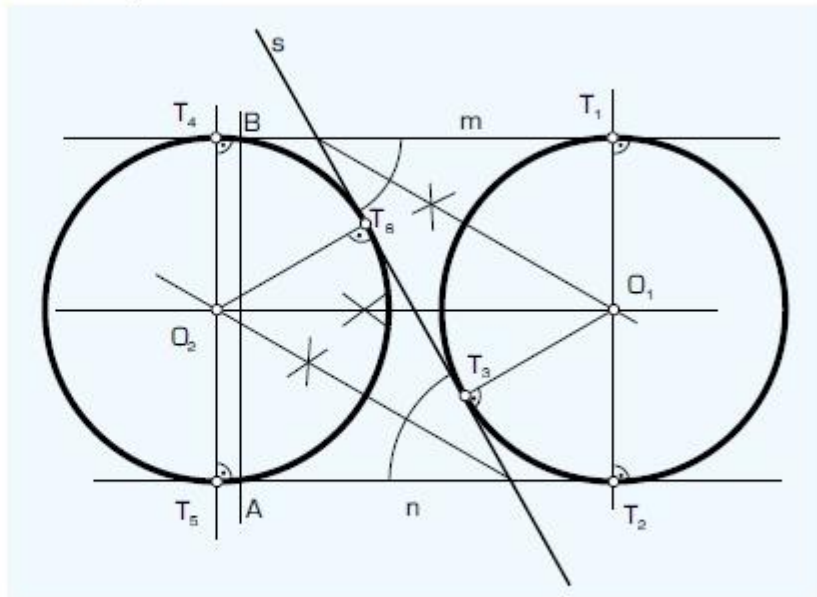
1. Con centro en O_1 se traza una circunferencia de radio $R+r$.
2. Se trazan las tangentes exteriores a esta circunferencia desde el punto O_2 siguiendo el proceso explicado anteriormente, obteniendo t_1 y t_2 .
3. Los puntos de intersección de las rectas O_1t_1 y O_2t_2 nos determinan los puntos de tangencia T_1 y T_2 .
4. Trazando paralelas a las rectas O_1T_2 y O_1T_1 por O_2 se obtienen los puntos de tangencia T_3 y T_4 en la circunferencia de radio r .
5. Uniendo T_2 con T_3 y T_1 con T_4 se obtienen las rectas pedidas.



Circunferencias tangentes a tres rectas dadas

Dadas las rectas m , n y s , el proceso a seguir es:

1. Por un punto cualquiera se traza una recta que sea perpendicular a m y n , obteniendo los puntos A y B sobre dichas rectas.
2. Para que las circunferencias solución sean tangentes a las rectas m y n sus centros han de hallarse sobre la mediatriz de AB , y por otro lado, para que sean tangentes a la recta s sus centros han de estar en la bisectriz del ángulo formado por s y las rectas m y n . Por tanto, en la intersecciones de estas rectas se localizan los centros O_1 y O_2 de las circunferencias solución.

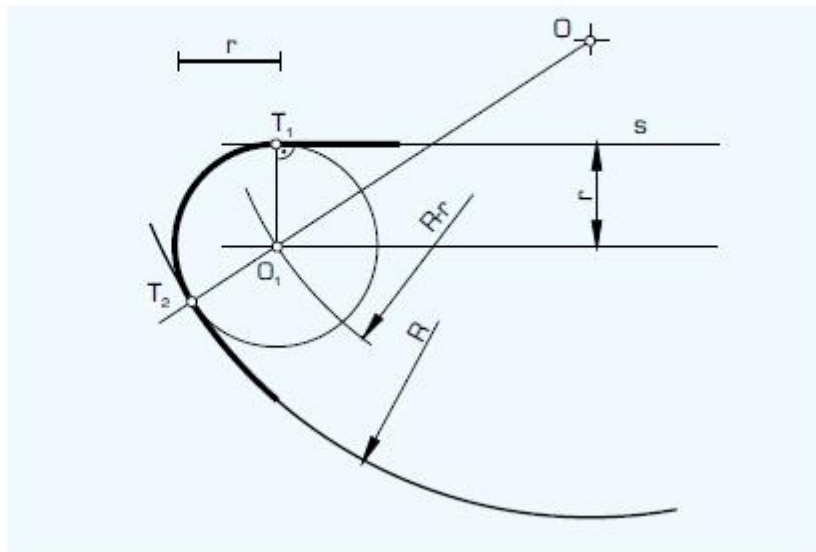


3. Los puntos de tangencia T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , T_5 , y T_6 se obtienen trazando desde O_1 y O_2 perpendiculares a cada una de las rectas dadas.

Enlace de una recta con un arco de circunferencia mediante un arco de radio conocido

Dada la recta s , el arco de circunferencia de centro O y el segmento r correspondiente al radio del enlace, el proceso a seguir es:

1. Se traza una recta que equidiste de la recta s la magnitud dada por el segmento r .
2. Con centro en O y radio $R-r$ se traza un arco que corta a la recta trazada en el apartado anterior en el punto O_1 , centro del enlace.
3. El punto de tangencia T_1 en la recta s se obtiene trazando desde O_1 una recta perpendicular a s ; y el punto de tangencia T_2 en el arco de radio R se localiza en la recta que une los centros O con O_1 .



Enlace de dos circunferencias conocido el radio del enlace

Dadas las circunferencias de centros O_1 y O_2 y el radio r del enlace, el proceso a seguir es:

1. Con centro en O_1 y después en O_2 y radios R_1+r y R_2+r respectivamente, se trazan arcos que al cortarse nos determinan los centros O_3 y O_4 de dos soluciones del enlace.
2. Los puntos de tangencia T_1 , T_2 , T_3 y T_4 se obtienen uniendo O_3 y O_4 con O_1 y O_2 respectivamente.
3. Otras dos soluciones se obtienen trazando arcos con centro en O_1 y después en O_2 y radios $r-R_1$ y $r+R_2$ respectivamente, que al cortarse nos determinan los centros O_5 y O_6 de los enlaces.
4. Los puntos de tangencia T_5 , T_6 , T_7 y T_8 se obtienen uniendo O_5 y O_6 con O_1 y O_2 respectivamente.

